

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Директор физтех-школы
прикладной математики и
информатики**

А.М. Райгородский

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Топологическая комбинаторика
по направлению:	Прикладная математика и информатика
профиль подготовки:	Прикладная математика и информатика Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра дискретной математики
курс:	1
квалификация:	магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 1

Программу составил: О.Р. Мусин, д-р физ.-мат. наук, преподаватель

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 20.01.2025

Аннотация

Этот курс посвящен предмету, который стал активной и инновационной областью исследований в математике за последние сорок лет с растущим числом приложений в математике, информатике и других прикладных областях. Топологическая комбинаторика занимается решением комбинаторных задач с применением топологических инструментов. В большинстве случаев эти решения очень элегантны, и связь между комбинаторикой и топологией часто оказывается неожиданным сюрпризом. Курс охватывает такие темы, как теоремы о неподвижных точках и их дискретные версии, справедливое распределение, проблемы раскраски графов, проблемы вложения из дискретной геометрии, а также алгоритмические вопросы, связанные с этими темами. Курс рассчитан на студентов 3–4 курсов и магистрантов. Предыдущие знания в топологии или теории графов полезны, но не обязательны.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

— дать обучающимся в руки новый для них инструмент решения комбинаторных задач. В результате обучающиеся смогут как решать задачи непосредственно с использованием топологических методов, так и в целом получать/улучшать навыки топологического анализа данных, которые могут быть полезными при разработке алгоритмов. Студенты также попрактикуются в командной работе над проектом, предполагающим реализацию полного цикла решения неформально поставленной задачи.

Задачи дисциплины

Задачи дисциплины включают ознакомление обучающихся с терминологией, методами и основными результатами топологической комбинаторики.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-2 Способен управлять проектом на всех этапах его жизненного цикла	УК-2.1 Формулирует в рамках обозначенной проблемы цель, задачи, актуальность, значимость (научную, практическую, методическую и иную в зависимости от типа проекта), ожидаемые результаты и возможные сферы их применения
	УК-2.2 Способен прогнозировать результат деятельности и планировать последовательность шагов для достижения данного результата. Формирует план-график реализации проекта в целом и план контроля его выполнения
	УК-2.3 Способен организовать и координировать работу участников проекта, обеспечивать работу команды необходимыми ресурсами
	УК-2.4 Представляет публично результаты проекта (или отдельных его этапов) в форме отчетов, статей, выступлений на научно-практических конференциях, семинарах и т.п.
ОПК-1 Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания и новые научные принципы и методы исследований в области прикладной математики и информатики
	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области прикладной математики и информатики и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности

ОПК-3 Способен разрабатывать математические модели и проводить их анализ при решении задач в области профессиональной деятельности	ОПК-3.1 Умеет анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
	ОПК-3.2 Владеет исследовательскими методами и способен использовать их при решении новых задач, применяя знания из различных областей науки (техники)
	ОПК-3.3 Владеет аналитическими и вычислительными методами решения, задач, понимает и учитывает на практике границы применимости получаемых решений
	ОПК-3.4 Способен самостоятельно приобретать, развивать и применять математические знания для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте
ОПК-4 Способен комбинировать и адаптировать существующие информационно-коммуникационные технологии для решения задач в области профессиональной деятельности	ОПК-4.1 Умеет применять информационно-коммуникационные технологии для поиска и анализа профессиональной информации, выделения в ней главного, структурирования, оформления и представления в виде аналитических обзоров с обоснованными выводами и рекомендациями
	ОПК-4.2 Умеет применять знание информационно-коммуникационных технологий для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.3 Способен адаптировать зарубежные комплексы обработки информации и автоматизированного проектирования к нуждам отечественных предприятий
ПК-1 Готов к включению в профессиональное сообщество; способен проводить под научным руководством локальные исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	ПК-1.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации; владеет навыками подготовки научных обзоров, публикаций рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языке
	ПК-1.2 Умеет решать научные задачи с пониманием существующих подходов к верификации модели программного обеспечения в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой
	ПК-1.3 Имеет практический опыт выступлений на научной аргументации при анализе объекта научной профессиональной деятельности
ПК-3 Владеет навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами, устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера, представления материалов собственных исследований, проведения корректуры, редактирования, реферирования работ	ПК-3.1 Знает основы ведения научной дискуссии и формы устного научного высказывания
	ПК-3.2 Умеет вести корректную дискуссию в области информационно-коммуникационных технологий и информационных систем, задавать вопросы и отвечать на поставленные вопросы по теме научной работы
	ПК-3.3 Имеет практический опыт участия в научных студенческих конференциях, очных, виртуальных, заочных обсуждениях научных проблем в области информационных технологий

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- основные понятия топологической комбинаторики и основные теоремы;
- контекст их использования;
- релевантный математический аппарат, основную учебную литературу по данной дисциплине

уметь:

- доказывать основные теоремы топологической комбинаторики,
- применять результаты топологической комбинаторики для учебных (упрощённых) и реальных задач дискретной математики и дискретной оптимизации.

владеть:

- терминологией топологической комбинаторики и алгоритмами справедливого дележа.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Лемма Шпернера	3	3		5
2	Задачи справедливого распределения	3	3		5
3	Классические теоремы о неподвижных точках	3	3		5
4	Дискретные аналоги теорем о неподвижных точках	3	3		5
5	Алгоритмы для задач справедливого дележа	3	3		5
6	Задачи о раскраска графов	3	3		5
7	Гипотеза Кнезера	4	4		5
8	Свойства графов и их сложность	4	4		5
9	Теорема Тверберга и ее топологические обобщения	4	4		5
Итого часов		30	30		45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

1. Лемма Шпернера

Понятие Лемма Шпернера.

Применение Лемма Шпернера в комбинаторной топологии, теории игр и других областях математики.

Применение Леммы Шпернера для доказательства сложных теорем, таких как теорема Брауэра о неподвижной точке.

2. Задачи справедливого распределения

Виды задач справедливого дележа.

Комбинаторные предпочтения.

Аддитивные предпочтения.

3. Классические теоремы о неподвижных точках

Теорема Брауэра о неподвижной точки.
Теорема Банаха о неподвижной точке.
Теорема Нильсена о неподвижной точке.

4. Дискретные аналоги теорем о неподвижных точках

Теоремы Таккера о неподвижной точке.
Теорема Гейла о неподвижной точке.
Теорема Шепли о неподвижной точке.

5. Алгоритмы для задач справедливого дележа

Задача распределения множества ресурсов среди нескольких людей, которые претендуют на доли этих ресурсов, при этом каждое лицо получает часть, которая в той или иной степени устраивает его.

6. Задачи о раскраска графов

Раскраска графа.
Теоретико-графовая конструкция для раскраски графов.
Рёберная раскраска.
Тотальная раскраска.

7. Гипотеза Кнезера

Гипотеза Кнезера, её доказательства, обобщения и приложения.

8. Свойства графов и их сложность

Характеристики, описывающие структуру и поведение графов.
Топологическая Теорема Радона.
Теорема Ван Кампена-Флореса.

9. Теорема Тверберга и ее топологические обобщения

Обобщения теоремы Тверберга:

1. Обобщения для произвольных топологических пространств.
2. Теоремы о пересечениях
3. Комбинаторные структуры.
4. Обобщения на другие поля.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

компьютерный класс, техническое обеспечение: Microsoft Office, 3DExperience/Catia.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Комбинаторика и теория вероятностей [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / А. М. Райгородский .— Долгопрудный : Интеллект, 2013 .— 104 с.

Дополнительная литература

1. Введение в теоретическое программирование. Беседы о методе [Текст] / А. П. Ершов : доп. М-вом высш. и сред. спец. обр. СССР - М. Наука, 1977

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Не требуется.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий курс, должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

Для успешного изучения дисциплины студент должен знать фундаментальные понятия, законы, теории.

Неотъемлемой частью курса являются лабораторные занятия, на которых закрепляются теоретические знания и вырабатываются практические навыки.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой.

Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала (по учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения;
- подготовку к экзамену.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Прикладная математика и информатика
профиль подготовки: Прикладная математика и информатика
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики
кафедра дискретной математики
курс: 1
квалификация: магистр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Экзамен

Разработчик: О.Р. Мусин, д-р физ.-мат. наук, преподаватель

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-2 Способен управлять проектом на всех этапах его жизненного цикла	УК-2.1 Формулирует в рамках обозначенной проблемы цель, задачи, актуальность, значимость (научную, практическую, методическую и иную в зависимости от типа проекта), ожидаемые результаты и возможные сферы их применения
	УК-2.2 Способен прогнозировать результат деятельности и планировать последовательность шагов для достижения данного результата. Формирует план-график реализации проекта в целом и план контроля его выполнения
	УК-2.3 Способен организовать и координировать работу участников проекта, обеспечивать работу команды необходимыми ресурсами
	УК-2.4 Представляет публично результаты проекта (или отдельных его этапов) в форме отчетов, статей, выступлений на научно-практических конференциях, семинарах и т.п.
ОПК-1 Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики	ОПК-1.1 Знает и способен использовать в профессиональной деятельности фундаментальные научные знания и новые научные принципы и методы исследований в области прикладной математики и информатики
	ОПК-1.2 Способен обобщать и критически оценивать опыт и результаты научных исследований в области профессиональной деятельности
	ОПК-1.3 Понимает междисциплинарные связи в области прикладной математики и информатики и способен их применять при решении задач профессиональной деятельности
ОПК-3 Способен разрабатывать математические модели и проводить их анализ при решении задач в области профессиональной деятельности	ОПК-3.1 Умеет анализировать задачу, планировать пути решения, предлагать и комбинировать способы решения
	ОПК-3.2 Владеет исследовательскими методами и способен использовать их при решении новых задач, применяя знания из различных областей науки (техники)
	ОПК-3.3 Владеет аналитическими и вычислительными методами решения, задач, понимает и учитывает на практике границы применимости получаемых решений
	ОПК-3.4 Способен самостоятельно приобретать, развивать и применять математические знания для решения нестандартных задач, в том числе в новой или незнакомой среде и в междисциплинарном контексте
ОПК-4 Способен комбинировать и адаптировать существующие информационно-коммуникационные технологии для решения задач в области профессиональной деятельности	ОПК-4.1 Умеет применять информационно-коммуникационные технологии для поиска и анализа профессиональной информации, выделения в ней главного, структурирования, оформления и представления в виде аналитических обзоров с обоснованными выводами и рекомендациями
	ОПК-4.2 Умеет применять знание информационно-коммуникационных технологий для решения поставленной задачи, формулирования выводов и оценки полученных результатов
	ОПК-4.3 Способен адаптировать зарубежные комплексы обработки информации и автоматизированного проектирования к нуждам отечественных предприятий

ПК-1 Готов к включению в профессиональное сообщество; способен проводить под научным руководством локальные исследования на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	ПК-1.1 Знает принципы построения научной работы, методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации; владеет навыками подготовки научных обзоров, публикаций рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языке
	ПК-1.2 Умеет решать научные задачи с пониманием существующих подходов к верификации моделей программного обеспечения в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой
	ПК-1.3 Имеет практический опыт выступлений на научной аргументации при анализе объекта научной профессиональной деятельности
ПК-3 Владеет навыками участия в научных дискуссиях, выступления с сообщениями и докладами, устного, письменного и виртуального (размещение в информационных сетях) характера, представления материалов собственных исследований, проведения корректуры, редактирования, реферирования работ	ПК-3.1 Знает основы ведения научной дискуссии и формы устного научного высказывания
	ПК-3.2 Умеет вести корректную дискуссию в области информационно-коммуникационных технологий и информационных систем, задавать вопросы и отвечать на поставленные вопросы по теме научной работы
	ПК-3.3 Имеет практический опыт участия в научных студенческих конференциях, очных, виртуальных, заочных обсуждениях научных проблем в области информационных технологий

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Топологическая комбинаторика» обучающийся должен:

знать:

- основные понятия топологической комбинаторики и основные теоремы;
- контекст их использования;
- релевантный математический аппарат, основную учебную литературу по данной дисциплине

уметь:

- доказывать основные теоремы топологической комбинаторики,
- применять результаты топологической комбинаторики для учебных (упрощённых) и реальных задач дискретной математики и дискретной оптимизации.

владеть:

- терминологией топологической комбинаторики и алгоритмами справедливого дележа.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлого занятия.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Привести полное доказательство леммы Шпернера для отрезка и треугольника (Шашкин).
2. Доказать лемму Таккера. .
3. Пусть f – непрерывное отображение отрезка $[a, b]$ на себя. Докажите, что тогда отображение $g = f^2$ (композиция отображения f с самим собой) имеет по крайней мере две неподвижных точки. Верно ли это, если f отображает отрезок $[a, b]$ в себя, но не на себя?
4. Сформулируйте и докажите теорему Брауэра о неподвижной точке для квадрата.
5. Сформулируйте и докажите теорему Брауэра о неподвижной точке для круга.
6. Докажите теорему Брауэра о неподвижной точке, используя лемму Шпернера
7. Докажите теорему Борсука–Улама для окружности

8. Докажите первую и вторую теоремы о блинах

Примеры экзаменационных билетов:

Билет №1:

1. Задача 1 (лемма Шпернера) выбирается из следующего списка:

- (а) Шашкин 6 (т.е. задача № 6 из книжки Шашкина)
- (б) Шашкин 9
- (в) Шашкин 11:
- (г) Шашкин 8
- (д) Шашкин 12

2. Задача 2:

- (а) Привести полное доказательство теоремы о справедливом разрезании торта для двух участников.
- (б) Привести полное доказательство теоремы о справедливом распределении арендной платы для двух участников.
- (в) Дана триангуляция многоугольника с вершинами в его вершинах. Доказать, что можно расставить метки А, В, С так, что у каждого треугольника будут все три метки.

Билет №2:

1. Задача выбирается из следующего списка:

- (а) Мат, с. 23, Theorem 2.1.1. Доказать эквивалентность BU1a и BU2a
- (б) Мат, с. 23, Theorem 2.1.1. Доказать эквивалентность BU1a и BU2b
- (в) Мат, с. 23, Theorem 2.1.1. Доказать эквивалентность BU1a и LS-c

2. Задача выбирается из следующего списка:

- (а) Шашкин стр. 24 («Вторая теорема о блинах».)
- (б) Мат, с. 53: Exercise 1
- (в) Мат, с. 53: Exercise 4

Критерии оценивания

Оценка отлично 10 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины, проявляющему интерес к данной предметной области, продемонстрировавшему умение уверенно и творчески применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 9 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений.

Оценка отлично 8 баллов - выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений, с некоторыми недочетами.

Оценка хорошо 7 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но недостаточно грамотно обосновывает полученные результаты.

Оценка хорошо 6 баллов - выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности.

Оценка хорошо 5 баллов - выставляется студенту, если он в основном знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач достаточно большое количество неточностей.

Оценка удовлетворительно 4 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он освоил основные разделы учебной программы, необходимые для дальнейшего обучения, и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации.

Оценка удовлетворительно 3 балла - выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, допускающему ошибки в формулировках базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, слабо владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и с трудом применяет полученные знания даже в стандартной ситуации.

Оценка неудовлетворительно 2 балла - выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных принципов и не умеет использовать полученные знания при решении типовых задач.

Оценка неудовлетворительно 1 балл - выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также справочной литературой, вычислительной техникой.